Квантование э/м поля

То, чего для был придуман аппарат вторичного квантования.

Оказывается, что решение классических ур-й Максвелла в свободном пространстве-времени можно записать как

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \sim \sum_{\boldsymbol{k},p} \left(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^{-} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^{+} e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})} \right)$$

p – поляризация.

Где **A –** 4-потенциал, т.е. включает в себя и φ, и **A.**

Т.е. поле можно представить как суперпозицию синусоидальных волн по всем направлениям. Коэфы $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^{-}$ и $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^{+}$ как раз отражают их вклад.

Я, разумеется, забыл коэф. пропорциональности, потому что его забывают все. Да и вообще цешки его съездят.

А вот выглядит провантованное магнитное поле:

$$\widehat{A}_{\Gamma.}(\overline{x},t) = \sum_{\overline{k},p} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k L^3}} \overline{e}_{\overline{k}p} \cdot \left(e^{i\overline{k}\overline{x}} \widehat{a}_{\overline{k}p} e^{-i\omega_k t} + e^{-i\overline{k}\overline{x}} \widehat{a}^{+}_{\overline{k}p} e^{i\omega_k t} \right)$$

Опять-таки, это 4-векторный оператор. $\{\hat{\varphi}, \widehat{A_x}, \widehat{A_y}, \widehat{A_z}\}$ - операторы проекций 4-потенциала.

Очень похоже на классический случай, только вместе цешек операторы рождения-уничтожения.

Возникает вопрос – а как с такой кракозяброй работать? У нас будет 1 задача, где мы с ней будем работать ☺ См. методичку «Первая задача в КЭД – задача излучения».

Беседа о фотоне

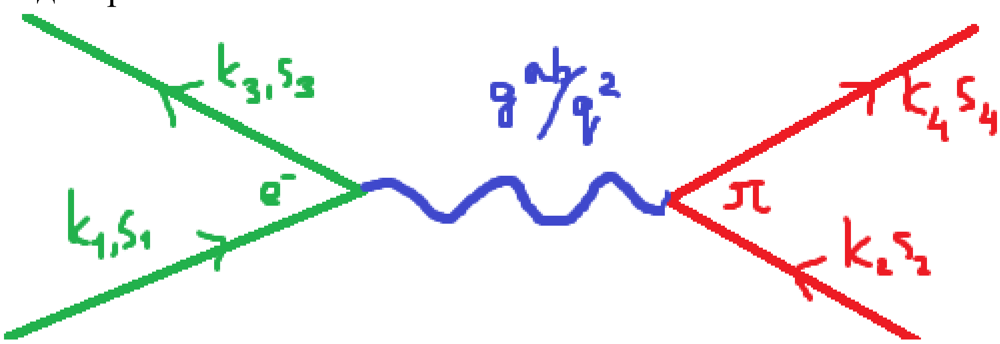
Что вы представляете при слове «фотон»? Вероятно, шарик (возможно, даже жёлтого цвета), летящий со скоростью света. Вспомним картинку из «Ну погоди»:

Так и хочется представить луч света фонаря в виде потока летящих частиц.
К этому можно добавить фразу «человеческий глаз настолько чувствителен, что в полной темноте видит один фотон».

Увы, сейчас мне предстоит разрушить эти представления. В «серьёзной» физике под фотонов имеется в виду плоская волна

$$e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$$

Таким образом, фотон не имеет локализации, и будучи плоской волной, полностью распределён по пространству. Принцип неопределённости Гейзенберга в действии: абсолютно точно знаем импульс, но абсолютно не знаем координату.
И диаграммы Фейнмана



следует представлять не как столкновение шариков, а интерференцию волн.

А что насчёт фраз «человеческий глаз способен увидеть один фотон» - тут имеется в виду не фотон, а квант энергии $h\omega$, излучённый одним из атомов. Вероятно, он представляет собой некий цуг, т.е. квантовую суперпозицию нескольких фотонов.

Уравнение Клейна-Гордона-Фока

Уравнение, которому подчиняются все частицы с целым спином – например, фотоны. Релятивистский аналог уравнения Шрёдингера.

$$\partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi + \partial_z^2\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0,$$

или (с использованием единиц, где $\hbar = c = 1$, $\Box$ — оператор Д'Аламбера):

$$(\Box - m^2)\psi = 0.$$

Его решение – суперпозиция плоских волн:

$$\varphi_n^{\pm}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a\omega_n}} e^{\pm i\omega t} \cos{(k_n x + \alpha_n)}$$

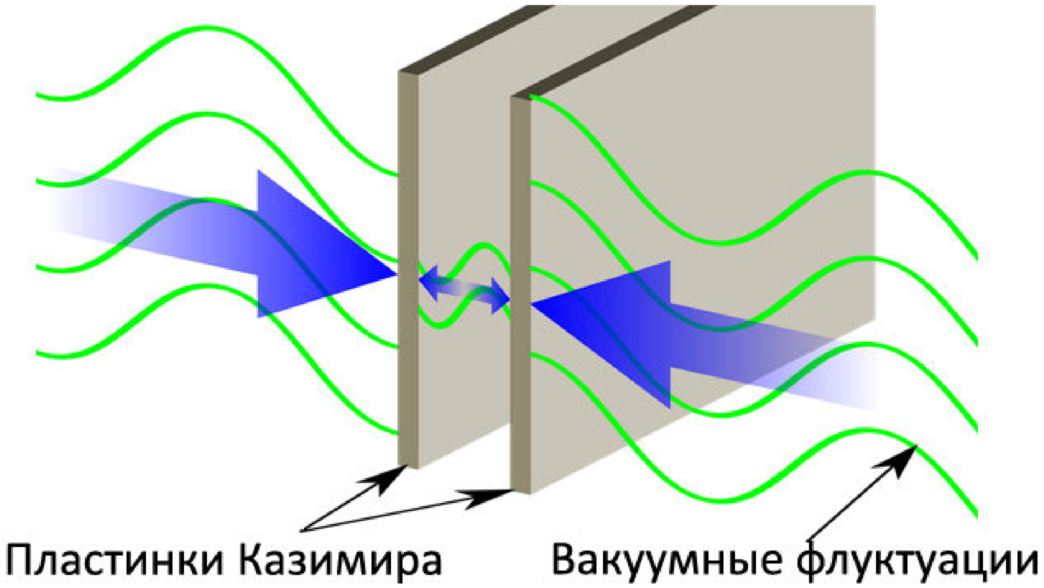
Почти как в Шрёдингере - с той лишь разницей, что в Шрёдингере $\omega = \frac{E}{h} = \frac{k^2}{2mh}$, а в КГФ (в системе h=c=1): $\omega_n = \sqrt{m^2 + k_n^2}$

Привычное нам соотошение из СТО: есть 4-вектор $\{\omega, \vec{k}\}$, и масса m является псевдоквадратом его нормы.

В общем, просто пусечка, а не уравнение. Не то что это ваше уравнение Дирака с гамма-матрицами:

Эффект Казимира

Представим себе две пластинки – идеально ровных и приближенных друг другу на маленькое расстояние. Тогда они начнут притягиваться:

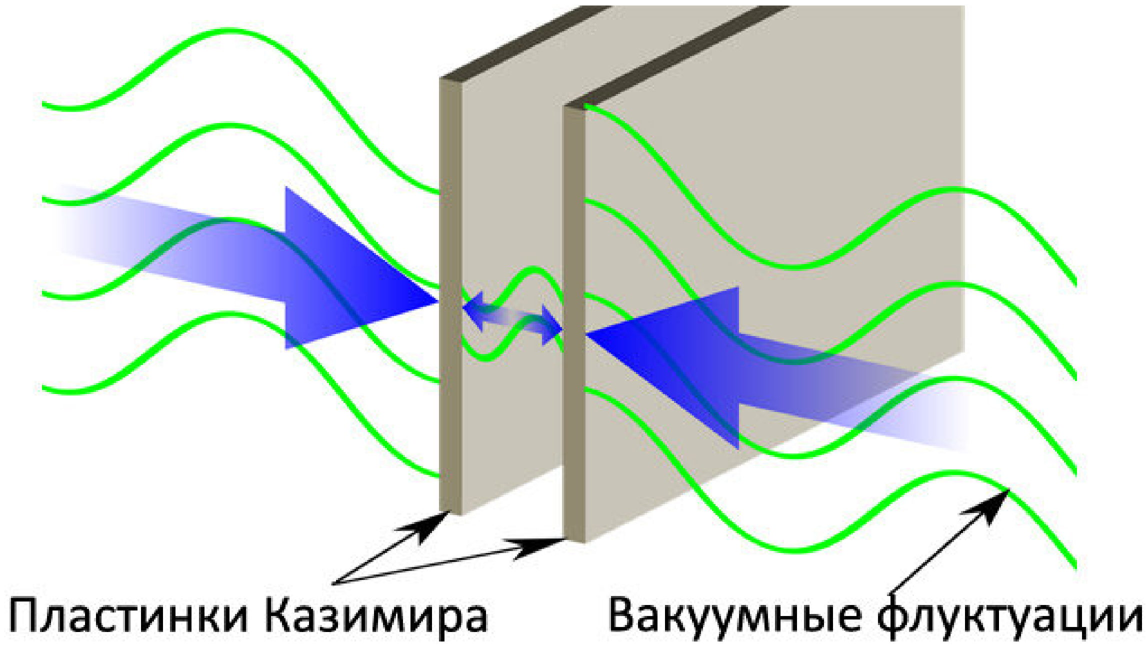


Притягиваться с давлением p

$$p = \frac{hc\pi^2}{240a^4} \ (a - \text{расстояние между пластинами})$$

Как вы видите, сила крайне мала. Невольно испытываешь восхищение перед экспериментаторами, которые смогли её померить (основная проблема – обеспечивать идеально ровную поверхность).

Меня часто ругают теоретики за то, что я слишком много упрощаю. Сейчас я буду ругать 100500 пособий в Интернете за неправильное объяснение эффекта Казимира. Вероятно, и вам ваш семинарист его объясняет неправильно. Давайте послушаем типовое объяснение:



Вакуум не пустой – в нём есть виртуальные частицы. Снаружи пластин эти виртуальные частицы могут иметь любую длину волн, а внутри – только те виртуальные частицы, у которых расстояние между пластинами равно целому числу полуволн. Т.е. внутри объёмная плотность частиц меньше, что и создаёт притяжение пластин.

Вроде всё гладко, но если мы поставим на плоскостях для плоских волн ГУ не Дирихле, а Неймана, то притяжение сменится отталкиванием.

Давайте на примере одномерного случая эффект Казимира посмотрим. (Трёхмерный случай, если его разбирать честно, а не опустить 80% выкладок, займёт 5 страниц, так что ну его нафиг. Интересующихся отсылаю к моему диплому ☺)

Энергия E есть

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\omega(n) + \frac{1}{2} \right) - \int_{0}^{\infty} \omega(n) dn$$

$\int_0^\infty \omega(n)dn$ – энергия снаружи. Мы её вычитаем, чтобы энергия была конечной. В этом и состоит суть перенормировки.

А $\omega(n)$ – циклическая частота моды номер n. Оно определяется через k_n из уравнения

$$\omega_n = \sqrt{m^2 + k_n^2}$$

А уже спектр k_nопределятся граничными условиями.

Как считать $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\omega(n) + \frac{1}{2} \right) - \int_0^\infty \omega(n)dn$?

Есть такая формула из ТФКП – формула Абеля-Плана. Она утверждает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) = \int_a^\infty f(x)\,dx + \frac{f(a)}{2} + \int_0^\infty \frac{f(a-ix) - f(a+ix)}{i\left(e^{2\pi x} - 1\right)} dx$$

(не будем приводить здесь её доказательство)

Там и содержится, что нам нужно. Получается, что

$$\varepsilon = \int_{0}^{\infty} \frac{F(-it) - F(it)}{i(e^{2\pi t} - 1)} dt = \frac{f(a)}{2} + i \int_{0}^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

В случае одинаковых ГУ Дирихле-Дирихле и безмассового поля

$$\omega_n = k_n = \frac{\pi n}{a}$$

Подставляем:

$$E = i\frac{\pi}{2a}\int_0^\infty \frac{it-(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt = i*\frac{\pi}{2a}\int_0^\infty \frac{2it}{e^{2\pi t}-1}dt = -\frac{\pi}{a}\int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1}dt$$

Интеграл $\int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1}dt$ равен 1/24, поэтому получаем ответ

$$E = \frac{\pi}{-24a}$$

Плотность энергии

$$\varepsilon = \frac{\pi}{24a^2}$$

Сила

$$F = -\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\pi}{24a^2}$$

А что будет в случае Дирихле-Дирихле? А вот что: $\omega_n = n + \frac{1}{2}$. Посмотрим, как это повлияет на ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2n+1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12} - 2*\left(-\frac{1}{12}\right)\right) = \frac{1}{24}$$

Т.е. теперь будет не притяжение с силой $\frac{\pi}{24a^2}$, а отталкивание с силой $\frac{\pi}{48a^2}$.

Прикол! Шах и мат тем, кто объясняет эффект Казимира тем, что «внутри мод строго меньше, и виртуальных частиц строго меньше».

Потому что глядя на формулу

$$E = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\omega(n) + \frac{1}{2}\right) - \int_0^\infty \omega(n)dn$$

видно, что хоть внутри мод и меньше, они в резонансе и берутся с большим весом. А что победит – решают граничные условия.